Il pendolo

Matteo Caffini
Dipartimento di Fisica
Politecnico di Milano
E-mail: matteo.caffini@mail.polimi.it

10 dicembre 2008

1 Il pendolo semplice

Si chiama *pendolo semplice* un punto materiale di massa m appeso tramite un filo inestensibile, di lunghezza l e massa trascurabile, ad un punto O.
Dal momento in cui il pendolo viene spostato dalla sua verticale e quindi lasciato, esso inizierà un moto oscillatorio che, in caso di smorzamento trascurabile, proseguirà identico fino ad una nuova interazione con l'ambiente.
Volendo ricavare il periodo delle oscillazioni possiamo scrivere le equazioni di Newton per la massa in direzione centripeta e tangenziale:

$$\begin{cases} ma_c = \mathrm{T} - mg\cos\theta \\ ma_t = -mg\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

Notando che il moto è circolare, per l'accelerazione centripeta ($a_c = l\dot{\theta}^2$) e l'accelerazione tangenziale ($a_t = l\ddot{\theta}$) si ottiene:

$$\begin{cases} ml\dot{\theta}^2 = \mathrm{T} - mg\cos\theta \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

Per angoli piccoli (piccole oscillazioni) si ha $\sin\theta \approx \theta$ e la seconda equazione fornisce l'equazione del moto del pendolo:

$$l\ddot{\theta} = -g\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

formalmente identica all'equazione di un moto armonico.
L'integrale generale è:

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_0\right) = \theta_{max}\cos\left(\omega t + \phi_0\right) \tag{4}$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ è detta *pulsazione* del moto.
Le costanti di integrazione (ampiezza massima e fase iniziale) si ottengono

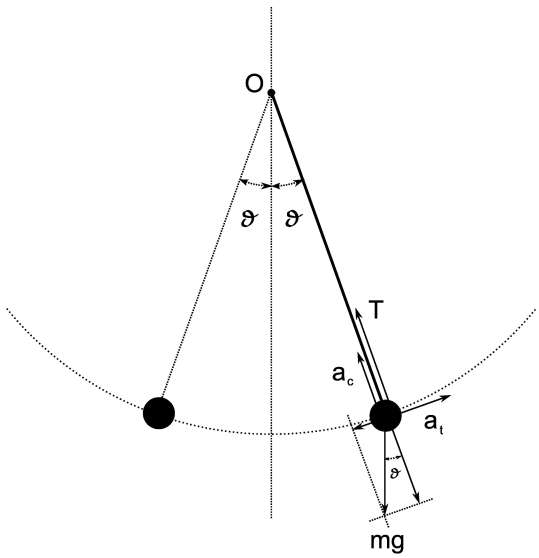

Figura 1: Il pendolo semplice

imponendo posizione e velocità iniziali.
Il periodo T delle (piccole) oscillazioni si ricava facilmente dalla pulsazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5}$$

e come si vede non dipende dalla massa m appesa, ma solamente dal campo gravitazionale g e dalla lunghezza del filo l (isocronismo delle oscillazioni).

2 Il pendolo fisico

Il pendolo semplice non è che un caso ideale di un oggetto fisico chiamato *pendolo fisico* e costituito da un corpo rigido vincolato ad un punto di sospensione O tramite una cerniera.
Siano M la massa del corpo rigido, I il momento d'inerzia rispetto al centro di rotazione O e d la distanza tra il centro di massa c_m ed il centro di rotazione O.
Scegliendo come polo il cento di rotazione O, l'unica forza da considerare[1] è il peso Mg, il momento della quale è la coppia τ_z che tende a riportare il pendolo in posizione verticale:

$$\tau_z = -Mgd\sin\theta \tag{6}$$

[1]Le forze che non consideriamo sono le reazioni vincolari della cerniera che hanno momento nullo rispetto al polo O

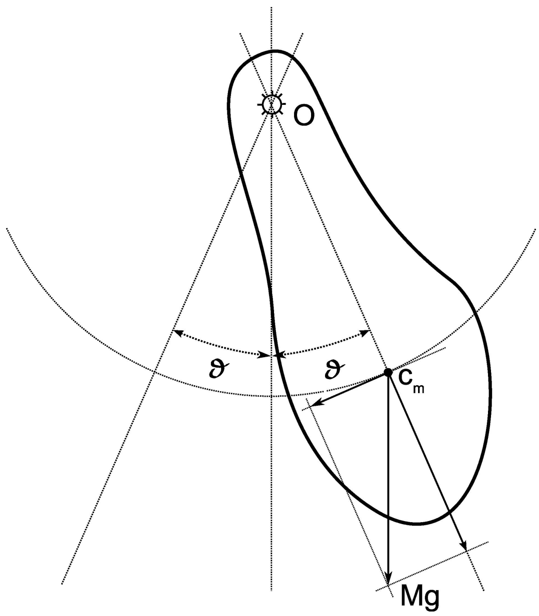

Figura 2: Il pendolo fisico

Scrivendo l'equazione di Newton per la dinamica rotazionale ($\sum \tau = I\alpha$) si ottiene:

$$-Mgd\sin\theta = I\ddot{\theta} \tag{7}$$

che assumendo piccole oscillazioni si semplifica in $-Mgd\theta = I\ddot{\theta}$. L'equazione del moto è perciò:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mdg}{I}\theta = 0 \tag{8}$$

che ha integrale generale:

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos\left(\sqrt{\frac{Mdg}{I}}t + \phi_0\right) \tag{9}$$

Il periodo delle oscillazioni è quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}} \tag{10}$$

Si nota quindi che un pendolo fisico di massa M, momento d'inerzia I e centro di massa a distanza d dalla cerniera ha periodo delle oscillazioni identico ad un pendolo semplice di lunghezza $l = \frac{I}{Md}$.

3 Oltre le piccole oscillazioni

Ricaviamo ora brevemente alcuni risultati non considerando l'approssimazione di piccole oscillazioni.
Imponendo la conservazione dell'energia meccanica ($\Delta E_k = \Delta E_{el}$)

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 0 = mgl\left(\cos\theta - \cos\theta_{max}\right) \tag{11}$$

avendo scelto lo zero del potenziale alla quota di O.
Dopo semplici passaggi si ottiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_{max}\right)} = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_{max}\right)} \tag{12}$$

indicando con T_0 il periodo delle piccole oscillazioni.
Separando le variabili, l'equazione diventa

$$dt = \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_{max}\right)}}d\theta \tag{13}$$

ed integrando (si osservi che per spostarsi tra 0 e θ_{max} si compie $\frac{1}{4}$ di periodo) si giunge a

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T_0}{2\pi}\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2\left(\cos\theta - \cos\theta_{max}\right)}} = \frac{T_0}{2\pi}\mathcal{I} \tag{14}$$

Il periodo delle oscillazioni è dunque $T = \frac{2T_0}{\pi}\mathcal{I}$.
Si trova infine che $\mathcal{I}$ è un integrale ellittico di prima specie e perciò non calcolabile in forma chiusa, ma approssimabile numericamente o tramite sviluppo in serie.
Una buona approssimazione è $T = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}}{16}\right)$ che ammette un errore relativo massimo di una parte su 300.000 per angoli di ampiezza massima pari a 10°.