

Moto di precessione della trottola

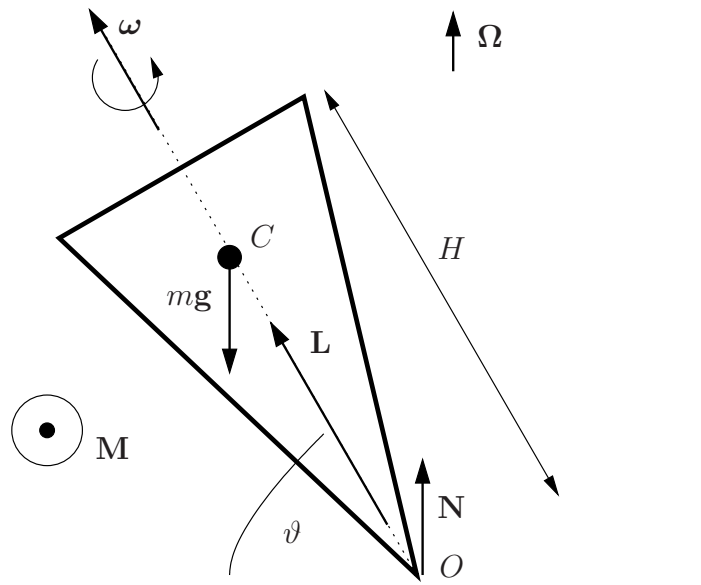


Figura 1: Schema di una trottola di forma conica.

Riferendoci alla Figura 1 abbiamo che:

- ω è la velocità angolare di rotazione del cono attorno al proprio asse;
- L è il momento angolare rispetto al punto O ;
- N è la reazione vincolare del piano d'appoggio;
- M è il momento delle forze esterne rispetto a O .
- H è l'altezza del cono e R è il raggio di base del cono;
- $h_c = \frac{3}{4}H$ è la distanza tra il punto O e il centro di massa C ;
- $I = \frac{3}{10}mR^2$ è il momento d'inerzia del cono rispetto al suo asse;

Sia $\hat{\mathbf{u}}_\omega$ il versore dell'asse del cono e $\hat{\mathbf{u}}_z$ quello uscente dal piano del foglio:

$$\begin{cases} \mathbf{L} = L\hat{\mathbf{u}}_\omega \\ \mathbf{M} = mgh_c \cos \vartheta \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L} \perp \mathbf{M}$$

Proiettando la Seconda Equazione Cardinale lungo $\hat{\mathbf{u}}_\omega$ possiamo dedurre che \mathbf{L} ha modulo costante:

$$|\mathbf{L}| = \text{cost.}$$

Sviluppando la derivata temporale di \mathbf{L} otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{dL}{dt}\hat{\mathbf{u}}_\omega + L\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = L\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\omega}{dt} \quad (1)$$

La derivata di $\hat{\mathbf{u}}_\omega$ può essere espressa, mediante le relazioni di Poisson, nel seguente modo:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\omega}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}}_\omega \quad (2)$$

dove $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare di precessione della trottola. Inserendo la (2) nella (1) otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = L\Omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \hat{\mathbf{u}}_z = L\Omega \cos \vartheta \hat{\mathbf{u}}_z \quad (3)$$

Il momento delle forze rispetto al polo O è:

$$\mathbf{M} = mgh_c \cos \vartheta \hat{\mathbf{u}}_z \quad (4)$$

eguagliando la (3) e la (4) otteniamo:

$$L\Omega = mgh_c \Rightarrow \Omega = \frac{mgh_c}{L}$$

Assumendo che $L = I\omega$ possiamo ricavare il modulo della velocità angolare:

$$\Omega = \frac{mgh_c}{I\omega} = \frac{5}{2}g\frac{H}{R^2\omega}$$

Si noti che in questo calcolo il momento angolare associato alla precessione è stato considerato trascurabile rispetto al momento angolare associato alla rotazione attorno all'asse del cono. La combinazione dei due momenti angolari si manifesta nel moto di nutazione.